ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1979

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES
INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE
L'AVIATION CIVILE
ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHEMATIQUE

Durée : 4 H.00
Coef. : 2

N^* est l'ensemble des entiers positifs n.

I

1°) Soit (E,d) (d distance sur E) un espace métrique complet, c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy est convergente. On rappelle qu'un sous-ensemble A de E est dit borné si l'ensemble de réels $\{d(x,y)\}_{(x,y) \in A^2}$ est majoré ;

la borne supérieure de cet ensemble de nombres est alors appelée diamètre A de A, et noté D(A).

Montrer que, dans un tel espace, toute suite $\{X_n\}$ de fermés non vides de E, décroissante ($\forall n$, $X_{n+1} \subset X_n$), et telle que $\lim_{n \to \infty} D(X_n) = 0$ a une intersection qui

a) n'est pas vide,
b) est réduite à un point.

On pourra étudier les propriétés de toute suite $\{a_n\}_{n \in N^*}$ telle que, quel que soit n, $a_n \in X_n$.

2°) Soit H un espace euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel sur le corps des réels, muni d'une forme bilinéaire ϕ, symétrique, à forme polaire non dégénérée, appelée produit scalaire, et de la norme associée à ϕ, définie par

$$||x||^2 = \phi(x,x)$$

On notera $(x|y)$ le produit scalaire $\phi(x,y)$.

a) Déduire de l'étude de $||x + \lambda y||^2$ l'inégalité suivante :

$$|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

b) Montrer que

$$||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2$$

3°) Dans le cas particulier où H est l'espace vectoriel C(0,1) des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$

a) Montrer que l'application de H x H dans R définie par $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ munit H d'une structure d'espace euclidien.

b) Soit, dans cet espace, la suite $\{f_n\}_{n \in N}$ des fonctions définies par $f_n(t) = \inf(n, t^{-1/3})$.

A étant un réel supérieur à 1, calculer $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{1}{A^3}} [f_n(t) - A]^2\,dt$

et en déduire que H n'est pas complet.

II

H désignant toujours un espace euclidien, on désigne par d la distance associée à la norme définie par :

$$d(f,g) = ||f - g||.$$

X étant un sous-ensemble de H et f un élément de H, on appelle distance d(f,X) de f à X :

$$d(f,X) = \inf_{g \in X} d(f,g).$$

X est dit convexe si et seulement si

$$(u,v) \in X \times X \Rightarrow (\forall t \in [0,1] \ , \ tv + (1-t)\,u \in X).$$

Dans le cas particulier où X est complet et convexe, on se propose de démontrer que, pour tout $f \in H$, il existe un élément u de X et un seul tel que $||f - u|| = d(f,X)$. On appellera cet élément u de X la projection de f sur X et on le notera : $P_X\, f$.

1°) La distance d(f,X) étant égale à $a > 0$, on associe à tout $n \in N^*$ la boule fermée B_n de centre f et de rayon $a + \frac{1}{n}$ et l'on pose $X \cap B_n = C_n$.

a) Vérifier que les ensembles C_n sont fermés.

b) Montrer que

$$\{u \in X \ / \ ||f - u|| = a\} = \bigcap_{n \in N^*} C_n .$$

c) v et w étant deux éléments de C_n, on pose

$$\frac{v + w}{2} = m .$$

Vérifier que

$$(2\,||f - m||)^2 + ||v - w||^2 = 2\,(||f - v||^2 + ||f - w||^2)$$

et en déduire que le diamètre $D(C_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

d) Montrer alors que $\bigcap_{n \in N^*} C_n$ est réduit à un point et un seul.

2°) Montrer que, u étant un élément de X, on a :

a) $u = P_X\, f \iff (\forall v \in X \ , \ (u - v \mid f - u) \geq 0)$

(On pourra utiliser le fait que $\forall\, \theta \in [0,1]$, $\theta v + (1-\theta)\,u \in X$).

b) $\left.\begin{array}{l} u = P_X\, f \\ \text{et} \\ v = P_X\, g \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ||P_X\, f - P_X\, g|| \leq ||f - g|| .$

3°) Dans cette question on s'intéresse au cas particulier où X est un cône de sommet 0 (élément neutre de H), c'est-à-dire un sous-ensemble de H vérifiant la proposition suivante :

$$x \in X \ \text{ et } \ t \in R_+^* \ \Rightarrow \ t\,x \in X.$$

On suppose ce cône convexe et complet.

Montrer que : u étant un élément de X

$$u = P_X\, f \iff \left\{\begin{array}{l} (u \mid f - u) = 0 \\ \text{et} \\ \forall v \in X, \ (v \mid f - u) \leq 0 . \end{array}\right.$$

4°) Application :

Dans le cas particulier où H est l'espace C(0,1) muni du produit scalaire défini au I - 3°), on désigne par X le sous-ensemble de H constitué par les fonctions dont la valeur est une constante positive.

a) Vérifier que X est un cône convexe complet ayant pour sommet la fonction nulle.

b) f étant un élément de H, trouver la valeur à donner au nombre $\lambda \in R_+$ pour que la projection de f sur X (c'est-à-dire la fonction constante approchant au mieux f) soit la fonction $t \to u(t) = \lambda$.

III

Dans cette partie, H est l'espace euclidien défini au début du II, et X un sous-espace vectoriel complet de H, dont on ne précise pas, pour l'instant, s'il est ou non de dimension finie.

.../...

1°) Montrer

a) que $u = P_X f \iff (u \in X \text{ et } (f - u) \in X^{\perp})$

où la notation $X^{\perp}$ représente l'orthogonal de X, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de H qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X.

b) que l'application P_X de H sur X est une application linéaire et qu'elle est continue ; calculer sa norme :

$$N(P_X) = \sup_{f \in H} \frac{||P_X f||}{||f||} .$$

c) que le noyau de P_X est $X^{\perp}$ et que $(X^{\perp})^{\perp} = X$.

d) que $X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de H et que H est la somme directe de X et de $X^{\perp}$ avec

$$\forall f \in H , \quad ||f||^2 = ||P_X f||^2 + ||P_{X^{\perp}} f||^2 .$$

2°) Dans la suite de cette partie, on s'intéresse au cas particulier où X est de dimension finie n, $(e_1, e_2 \dots e_n)$ étant une base de X. Soit $(v_p)_{p \in N}$ une suite de vecteurs de X, où

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{pi} e_i .$$

Vérifier que l'on a, quels que soient les entiers naturels p et q :

$$||v_p - v_q|| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{pi} - \alpha_{qi}| \cdot ||e_i|| .$$

Montrer alors que X est un sous-espace vectoriel complet de H.

3°) a) f étant un vecteur de H, à quelles conditions doivent satisfaire les composantes $u_1, u_2 \dots u_n$ d'un vecteur $u \in X$ pour que u vérifie la proposition

$$\forall i \leq n , \quad (f - u \mid e_i) = 0.$$

b) Montrer qu'il existe un vecteur $u \in X$ et un seul vérifiant la proposition 3°) a).

c) Prouver alors que, pour tout $v \in X$, on a :

$$||f - v||^2 \geq ||f - u||^2 .$$

En déduire un procédé de construction de la projection u de f sur X.

4°) Montrer que, si la base $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est orthogonale, alors

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f \mid e_i)}{||e_i||^2} e_i .$$

5°) Appliquant la théorie précédente au cas où $H = C(0,1)$ et X le sous-espace engendré par les 3 fonctions

$$e_i : t \to t^{i-1} \qquad (i = 1, 2, 3) ,$$

calculer les valeurs à donner aux coefficients réels a, b, c pour que l'approximation de la fonction :

$$f : t \to f(t) = \sin \pi t$$

par la fonction polynome

$$u : t \to u(t) = a t^2 + 3 bt + c$$

soit la meilleure possible, c'est-à-dire que $||f - u||^2$ soit minimum.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail